E.P.I.T.A. 2006

Epreuve de mathématiques 1 (3 heures)

Dans tout ce problème, l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^3$ est muni de son produit scalaire $\langle\ .\ ,\ .\ \rangle$ et de sa norme euclidienne $\|\ .\ \|$ usuels. On se propose de déterminer les groupes d'isométries laissant stables les quadriques de révolution engendrées par rotation d'une droite autour de Oz.

I. Préliminaires

1°) On sait qu'un endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ est *orthogonal* s'il conserve la norme euclidienne :

$$(1) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^3, \quad \|f(x)\| = \|x\|.$$

a) Montrer qu'un endomorphisme orthogonal f est bijectif (et c'est donc un automorphisme).
b) Montrer que les automorphismes orthogonaux de $\mathbb{R}^3$ forment un groupe, noté $O(\mathbb{R}^3)$.
c) Etablir qu'un automorphisme f de $\mathbb{R}^3$ est orthogonal si et seulement s'il vérifie :

$$(2) \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^3, \quad \langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle.$$

(On pourra exprimer $\|f(x+y)\|^2$ en faisant intervenir le produit scalaire $\langle f(x), f(y)\rangle$).
d) Etablir qu'un automorphisme f de $\mathbb{R}^3$ est orthogonal si et seulement s'il vérifie :

$$(3) \quad \forall\, x, z \in \mathbb{R}^3, \quad \langle f(x), z\rangle = \langle x, f^{-1}(z)\rangle.$$

II. Groupes d'automorphismes orthogonaux de $\mathbb{R}^3$

L'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^3$ est orienté et rapporté à sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ (qui est la base orthonormale directe définie par $e_1 = (1, 0, 0),\ e_2 = (0, 1, 0),\ e_3 = (0, 0, 1)$).
Pour tout nombre réel θ, on introduit alors le vecteur unitaire $u(\theta) = \cos(\theta)\, e_1 + \sin(\theta)\, e_2$.
On conviendra d'appeler *demi-tour d'axe D* toute rotation de mesure π autour d'une droite D.

2°) On considère pour $\theta \in \mathbb{R}$ les endomorphismes f_θ et g de $\mathbb{R}^3$ dont les matrices dans $\mathcal{B}$ sont :

$$F_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Vérifier que f_θ et g sont des automorphismes orthogonaux directs, donc des rotations.
Préciser l'axe et la mesure de f_θ et de g.
b) Préciser la matrice, les valeurs propres et les sous-espaces propres de $f_\theta \circ g$.
Vérifier que $f_\theta \circ g$ est diagonalisable et que c'est un demi-tour dont on précisera l'axe.
c) On pose $r_1 = -g$, $r_2 = -f_\pi \circ g$, $r_3 = -f_\pi$.
Préciser les matrices de r_1, r_2, r_3, puis reconnaître leur nature géométrique.

3°) On convient de noter :
- G_+ l'ensemble constitué des automorphismes f_θ et $f_\theta \circ g$ où θ décrit $\mathbb{R}$,
- G_- l'ensemble constitué des automorphismes $-f_\theta$ et $-f_\theta \circ g$ où θ décrit $\mathbb{R}$:

$$G_+ = \{ f_\theta,\ f_\theta \circ g \ /\ \theta \in \mathbb{R}\} \quad ; \quad G_- = \{-f_\theta,\ -f_\theta \circ g \ /\ \theta \in \mathbb{R}\}.$$

a) Reconnaître g^{-1}, $f_\alpha \circ f_\beta$ et $g \circ f_\alpha \circ g$ (on pourra d'abord expliciter leurs matrices).
En déduire le nombre réel θ tel que $g \circ f_\alpha = f_\theta \circ g$.
b) En déduire que G_+ est un sous-groupe du groupe orthogonal $O(\mathbb{R}^3)$, qui est constitué des rotations d'axe Vect(e_3) et des demi-tours d'axe $u(\alpha)$ où α est un réel quelconque.
c) Démontrer que $G = G_+ \cup G_-$ est un groupe, et que celui-ci contient aussi r_1, r_2, r_3.

III. Groupes d'isométries de quadriques de révolution

On considère deux réels a et m avec $a \geq 0$ et on note $\mathcal{Q}$ la surface engendrée par la rotation autour de Oz = Vect(e_3) de la droite $\mathcal{D}$ passant par $A(a, 0, 0)$ et dirigée par $v(0, m, 1)$.

4°) On désigne par $M(z)$ le point de cote z de la droite $\mathcal{D}$, et par $M(z, \theta)$ le point déduit de $M(z)$ par la rotation de mesure θ autour de l'axe Oz orienté par e_3.
a) Déterminer les coordonnées du point $M(z)$, puis du point $M(z, \theta)$.
b) Etablir qu'une équation cartésienne de l'ensemble $\mathcal{Q}$ des points $M(z, \theta)$ pour $(z, \theta) \in \mathbb{R}^2$ est :

$$x^2 + y^2 = m^2 z^2 + a^2.$$

c) On suppose $a > 0$. Reconnaître et représenter en perspective $\mathcal{Q}$ pour $m = 0$ et $m \neq 0$.
d) On suppose $a = 0$. Reconnaître et représenter en perspective $\mathcal{Q}$ pour $m = 0$ et $m \neq 0$.

5°) On note $\mathcal{G}$ l'ensemble des automorphismes orthogonaux φ laissant stable $\mathcal{Q}$, c'est à dire :

$$\mathcal{G} = \{ \varphi \in O(\mathbb{R}^3) \ /\ \varphi(\mathcal{Q}) \subset \mathcal{Q} \}.$$

a) Montrer que les images par g et $-g$ d'un point $M(x, y, z)$ de $\mathcal{Q}$ appartiennent à $\mathcal{Q}$.
Montrer que les images par f_θ et $-f_\theta$ d'un point $M(x, y, z)$ de $\mathcal{Q}$ appartiennent à $\mathcal{Q}$.
b) En déduire que $\mathcal{G}$ est stable par composition et qu'il contient $G = G_+ \cup G_-$.

6°) Dans cette question, on détermine le groupe $\mathcal{G}$ pour $a > 0$.
On désigne ici par $\mathcal{S}$ la sphère de centre O et de rayon a et par φ un élément de $\mathcal{G}$.
a) Que dire de l'image de $\mathcal{S}$ par φ ?
b) Déterminer l'intersection C des ensembles $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{S}$, et montrer que $\varphi(C) \subset C$.
En déduire, qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi(e_1) = u(\theta)$ et $\varphi(e_2) = \varepsilon\, u\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$, où $\varepsilon = \pm 1$.
Etablir alors que $\varphi(e_3)$ est égal à e_3 ou $-e_3$.
c) On suppose dans cette sous-question que $\varphi(e_3) = e_3$.
Déterminer les matrices dans la base $\mathcal{B}$ de φ, puis de $f_{-\theta} \circ \varphi$ en fonction de $\varepsilon = \pm 1$.
En déduire que φ appartient à une partie de G formée de deux éléments qu'on précisera.
d) On suppose dans cette sous-question que $\varphi(e_3) = -e_3$.
En exploitant $\varphi \circ r_3$, établir que φ appartient à une partie de G formée de deux éléments.
e) Déduire de l'ensemble des résultats précédents que $\mathcal{G} = G$.

7°) Dans cette question, on détermine le groupe $\mathcal{G}$ pour $a = 0$ et $m \neq 0$.
On désigne ici par $\mathcal{S}$ la sphère de centre O et de rayon $\sqrt{1+m^2}$ et par φ un élément de $\mathcal{G}$.

a) Déterminer l'intersection $\mathcal{J}$ des ensembles $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{S}$, et montrer que $\varphi(\mathcal{J}) \subset \mathcal{J}$.
En déduire, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, qu'il existe $\theta' \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi(m\,u(\theta) + e_3) = m\,u(\theta') \pm e_3$,

b) Vérifier que $\langle \varphi(m\,u(\theta) + e_3),\, e_3\rangle^2 = 1$ et $\langle \varphi(m\,u(\theta) - e_3),\, e_3\rangle^2 = 1$.
En déduire par différence que :

$$\forall\, \theta \in \mathbb{R},\quad \langle \varphi(e_3),\, e_3\rangle\, \langle \varphi(u(\theta)),\, e_3\rangle = 0.$$

c) On suppose dans cette sous-question que $\langle \varphi(e_3),\, e_3\rangle = 0$.
Etablir que $\langle e_3,\, \varphi^{-1}(e_3)\rangle = 0$, puis qu'il existe un réel α tel que $\varphi^{-1}(e_3) = u(\alpha)$.
Calculer $\left\langle \varphi\left(m\,u\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + e_3\right),\, e_3\right\rangle$ et en déduire une contradiction.

d) Démontrer à l'aide des questions précédentes que $\langle \varphi(u(\theta)),\, e_3\rangle = 0$ pour tout réel θ.
En déduire, qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi(e_1) = u(\theta)$ et $\varphi(e_2) = \varepsilon\, u\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$, où $\varepsilon = \pm 1$.
Etablir alors que $\varphi(e_3)$ est égal à e_3 ou $-e_3$.

e) Conclure que $\mathcal{G} = G$.

***